УДК 51-74

А.А. ОЧИРОВА, Д.К. ЕРШОВ

A.A. OCHIROVA. D.K. ERSHOV

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОРРИСА ДЛЯ ОЦЕНКИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ**

**APPLICATION OF THE MORRIS METHOD TO ESTIMATE THE SENSITIVITY OF MODEL PARAMETERS**

*В данной статье рассмотрено применение метода Морриса для оценки чувствительности параметров моделей*

*Ключевые слова: Анализ чувствительности, метод Морриса, элементарный эффект*

*In this paper, show the application of the Morris method to estimate the sensitivity of model parameters.*

*Key words: sensitivity analysis, Morris’s method, elementary effect*

Математические модели часто имеют сложную структуру, и, как следствие, взаимное влияние параметров друг на друга и на выход модели, что требует дополнительного исследования. Довольно часто некоторые входы модели могут быть подвержены источникам неопределенности, включая ошибки измерения, отсутствие информации и плохое или частичное понимание движущих сил. Эта неопределенность накладывает ограничение на значения на выходе модели.

Анализом чувствительности называют оценку влияния входных параметров модели на ее выход. Существует множество различных методов для анализа чувствительности, которые сводятся к двум большим группам: локальные методы и глобальные методы. Глобальные, или стохастические методы анализа чувствительности, учитывают влияние параметров, одновременно изменяющихся в некотором диапазоне значений. Мерой чувствительности, следующей из такого глобального метода, является усредненное влияние неопределенностей. В данном определении глобальные и стохастические методы являются взаимозаменяемыми, а также упор сделан на одновременный анализ многих параметров, безотносительно к тому, в каком диапазоне, малом или большом, они изменяются.

Если проблема заключается в отборе нескольких важных входных параметров среди большого числа, содержащихся в модели, то целесообразно использовать скрининговые методы, которые относятся к глобальным методам. В целом, скрининговые методы являются более эффективными, когда число важных параметров в модели невелико по сравнению с общим числом параметров в модели. Другими словами, они работают лучше в случае, когда влияние параметров в модели распределены по закону Парето, т.е. с небольшим количеством наиболее влиятельных параметров и большинством невлиятельных. Существуют такие скрининговые методы, как: метод Морриса, основанный на элементарных эффектах; метод Коттера, основанный на строгих предположениях и не работает, если эти предположения не выполняются; итерационный дробный факторный метод, предложенный Андресом и Хаджасом, основанный на идее группировки параметров и дает хорошие результаты, когда число важных параметров ограничено; последовательная бифуркация, предложенная Беттонвилом, применимая только тогда, когда эффекты параметров имеют известные знаки, что означает, что аналитик знает, положительно или отрицательно влияет конкретный отдельный параметр на выход.

Метод Морриса — это простой, но эффективный способ отбора нескольких важных входных параметров из множества, содержащихся в модели. Моррис М. Д. предложил идею о построении двух мер чувствительности с целью определения того, какие входные параметры можно считать имеющими эффекты, которые: пренебрежимо малы, линейны и аддитивны, нелинейны, или вовлечены во взаимодействие с другими параметрами. По отношению к другим группам глобальных методов его преимущество в том, что он исследует каждый параметр в отдельности.

Вычисляя элементарные эффекты, в первую очередь надо получить параметры, измененные на некоторый шаг ∆. В данном методе используются траектории для вычисления равномерного изменения.

Базовое значение начальной точки изменения параметров *x*∗ для некоторого вектора параметров *X* выбирается случайным образом в *p*-уровневой сетке некоторого пространства Ω. *x*∗ не является частью траектории, но используется для генерации всех точек траектории, которые получаются из *x*∗ путем увеличения одной или более *k* его компонент на ∆, где *k* – количество компонентов. Первая точка траектории, *x*(1), получается путем увеличения одной или нескольких компонент *x*∗ на ∆, таким образом, что *x*(1) все еще находится в пространстве Ω. Вторая точка траектории, x(2) , генерируется из *x*∗ с условием, что она отличается от *x*(1) в своей *i*-й компоненте, которая была либо увеличена, либо уменьшена на ∆:

 $x^{\left(2\right)}=x^{\left(1\right)}+e\_{i}Δ$

Или

 $x^{\left(2\right)}=x^{\left(1\right)}-e\_{i}Δ$.

Индекс *i* выбирается случайным образом из набора {1, 2, … , *k*}. Третья точка выборки, *x*(3) генерируется из *x*∗ с тем свойством: *x*(3) отличается от *x*(2) только для одной компоненты *j*, для любого *j* = *i*. Это может быть:

$x^{\left(3\right)}=x^{\left(2\right)}+e\_{i}Δ$

Или

$x^{\left(3\right)}=x^{\left(2\right)}-e\_{i}Δ$.

И так далее до *x*(*k*+1) , который замыкает траекторию. В результате проектирования получается траектория из *k+1* точек выборки *x*(1), *x*(2), … , *x*(*k*+1)с ключевыми свойствами, что две последовательные точки отличаются только одной компонентой и что любое значение базового вектора *x*∗ было хотя бы раз изменено на ∆. Пример траектории для *k* = 3 показан на рисунке 1.

Траектория может быть представлена в виде матрицы *B*∗ размерности *(k + 1) × k*, строками которой являются векторы *x*(1), *x*(2), … , *x*(*k*+1). Для построения *B*∗, первым шагом нужно выбрать матрицу *B*, размерность которой составляет *(k + 1) × k*, элементами которой являются 0 и 1, а ключевым свойством является то, что для каждого индекса матрицы *j*,*j* = 1, …, *k*. Существуют две строки *B*, которые отличаются друг от друга только *j*-й записью.

Удобным выбором для *B* является строго нижняя треугольная матрица из единиц:

0 0 0 0 … 0

 1 0 0 0 … 0

*B* = 1 1 0 0 … 0

 1 1 1 0 … 0

 … … … … … 0

 1 1 1 1 … 0

Матрицу $B^{'}$ , для расчёта матрицы траекторий $B^{\*}$ получают из формулы:

$B^{'}=J\_{k+1,k}x^{\*}+ΔB$,

где *Jk+1,k* – это матрица единиц размерностью *(k + 1) × k*, а *x*∗ - выбранное базовое значение. Рандомизированная версия матрицы выборки может быть сформировано следующим образом:

$B^{\*}=\left(J\_{k+1,1}x^{\*}+\left(\frac{Δ}{2}\right)\left[\left(2B-J\_{k+1,k}\right)D^{\*}+J\_{k+1,k}\right]\right)P^{\*}$,

где $D^{\*}$ – это *k*-мерная диагональная матрица, в которой каждый элемент с равной вероятностью равен либо +1, либо -1, а *P*∗– это матрица *k× k* случайных перестановок, в которой каждая строка содержит один элемент, равный 1, все остальные равны 0, и никакие два столбца не имеют единицу в одной и той же позиции. Считая строку за строкой, *P*∗ определяет порядок перемещения параметров; *D*∗ определяет, будут ли параметры увеличивать или уменьшать свое значение вдоль траектории. *B*∗ обеспечивает изменение одного параметра модели, который выбирается случайным образом.

Рисунок 1 – Траектории во входном пространстве Ω при *k* = 3

Описанная выше стратегия выборки приводит к построению *r* траекторий в пространстве Ω. Каждая траектория соответствует *k*+1 прогону модели и позволяет вычислить элементарный эффект для каждого параметра *i*, для *i* = 1, …, *k*. Если *x*(*n*) и *x*(*n*+1), с *n* в множестве {1, 2, …, *k*}, являются двумя точками выборки *j*-й траектории, отличающимися друг от друга по *i* компоненте, то элементарный эффект, связанный с параметром *i* имеет вид:

$EE\_{j}^{i}\left(x^{\left(n\right)}\right)=\frac{\left|y\left(x^{\left(n+1\right)}\right)-y\left(x^{\left(n\right)}\right)\right|}{Δ}$ – если *i-*ый компонент увеличился на ∆

$EE\_{j}^{i}\left(x^{\left(n+1\right)}\right)=\frac{\left|y\left(x^{\left(n\right)}\right)-y\left(x^{\left(n+1\right)}\right)\right|}{Δ}$ – если *i-*ый компонент уменьшился на ∆

После получения *r* элементарных эффектов на каждый вход ($EE\_{j}^{i}$, *i* = 1, 2, …, *k*, *j* = 1, 2, …, *r*), статистики $μ\_{i}$,$μ\_{i}^{\*}$ и $σ\_{i}^{2}$ относительно распределений могут быть вычислены для каждого параметра с помощью тех же оценок, которые были бы использованы для независимых случайных выборок, поскольку *r* элементарных эффектов принадлежат к различным траекториям и поэтому являются независимыми:

$μ\_{i}=\frac{1}{r}\sum\_{j=1}^{r}EE\_{i}^{j}$;$μ\_{i}^{\*}=\frac{1}{r}\sum\_{j=1}^{r}|EE\_{i}^{j}|$*;*

$σ\_{i}^{2}=\frac{1}{r-1}\sum\_{j=1}^{r}\left(EE\_{i}^{j}-μ\_{i}\right)^{2}$,

где $EE\_{i}^{j}$ обозначает элементарные эффекты относительно параметра *i*, рассчитанные вдоль траектории *j*; $μ\_{i} $– среднее значение, которое оценивает общее влияние параметра на результат. $σ\_{i}^{2}$ – стандартное отклонение, которое оценивает совокупность эффектов параметра, будь то нелинейные и/или обусловленные взаимодействием с другими параметрами. Использование $μ\_{i}^{\*}$ удобно, поскольку решает проблему ошибок второго типа (неспособность идентифицировать параметр со значительным влиянием на модель). На основе полученных данных можно построить графики зависимостей абсолютного среднего значения от стандартного отклонения, а также параметров от абсолютного значения (на рисунке 2 приведены примеры).

*X*

*X*

*X*

*X*

*X*

*X*

*X*

*X*

$$μ\_{i}^{\*}$$

$$μ\_{i}^{\*}$$

$$σ\_{i}^{2}$$

*X3*

*X8*

*X7*

*X5*

*X1*

*X4*

 (а) (б)

Рисунок 2 – Графики зависимостей:

а – абсолютного среднего значения ($μ\_{i}^{\*}$) от стандартного отклонения ($σ\_{i}^{2}$); б – параметров модели (*X*) от абсолютного значения ($μ\_{i}^{\*}$)

По графикам зависимостей можно делать выводы о влиянии того или иного параметра на модель. Рисунок 2а представляет результаты в виде диаграммы рассеяния, на которой по горизонтальной оси целевые (фактические) значения, а по вертикальной – значения стандартного отклонения. Высокое значение $μ\_{i}^{\*}$ указывает на сильное общее влияние параметра на результат. В то же время, высокое значение $σ\_{i}^{2}$ показывает сильную взаимосвязь эффектов параметра. Следовательно, можно сделать вывод, что параметром *X3* можно пренебречь, однако параметр *X4* имеет большее влияние на модель, следовательно, его нельзя опускать

На рисунке 2б указана зависимость параметров от $μ\_{i}^{\*}$. Из данного графика видно, что *X4* имеет наибольшее влияние параметра на результат.

Приведенный пример и анализ показывают, что метод Морриса позволяет не только проследить влияние параметра на модель, но и определить их приоритетность. Применение данного метода возможно в различных научных областях, например при работе с моделями, описывающими химические реакции, для определения степени влияния констант скоростей на концентрацию продукта реакции. На основе полученных данных, а также графиков зависимостей, можно сделать вывод, что наибольшее влияние на модель имеет *X4* . Из восьми параметров модели можно пренебречь тремя – *X2*, *X3*, *X4*, поскольку они особо не влияют на модель.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Saltelli A., Annoni P. How to avoid a perfunctory sensitivity analysis // Environmental Modelling & Software, 2010. Vol. 25, No. 12, P. 1508 – 1517.
2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. М.: Издат. дом МЭИ – 2008 г. - 672 с/
3. Morris M. D. Factorial sampling plans for preliminary computational experiments // Technometrics, 1991. Vol. 33, No 2., P. 161 – 174.

**Очирова Алина Анатольевна**
Санкт–Петербургский государственный технологический институт (технический университет),
г. Санкт – Петербург
Студентка кафедры системного анализа и информационных технологий
Тел.: +7(960)-897-65-67
E-mail: ochirova02@inbox.ru

**Ершов Даниил Константинович**

Санкт–Петербургский государственный технологический институт (технический университет),

Аспирант кафедры системного анализа и информационных технологий

Тел.: +79006430263

Email: daniilershov2015@gmail.com