УДК 517.9

Л.А. КОВАЛЕВА, В.В.БОЛЬШАНИН, Г.А. ВЕРЕИТИНОВА

L.A. KOVALEVA, V.V.BOLSHANIN, G.A. VEREITINOVA

**РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ, ЗАДАННОГО НА ПИРАМИДЕ**

**SOLVABILITY OF THE NEUMANN PROBLEM FOR A SINGLE EQUATION GIVEN ON A PYRAMID**

*В данной работе авторы рассматривают в трехмерном пространстве краевую задачу для эллиптического уравнения на двумерном комплексе, на границе которого задано условие Дирихле. В рамках теоретико-функционального подхода задачу удается редуцировать к нелокальной краевой задаче Римана. Поиск решения задачи осуществляется в пространствах Гельдера с весом. В статье доказывается фредгольмова разрешимость задачи, подсчитан ее индекс.*

*Ключевые слова: задача Неймана, двумерный комплекс; задача Римана; индекс задачи; краевая задача; пространство Гельдера с весом*

*In this article, the authors consider in three-dimensional space a boundary value problem for an elliptic equation on a two-dimensional complex, on the boundary of which the Dirichlet condition is given. Within the framework of the functional-theoretic approach, the problem can be reduced to a nonlocal Riemann boundary value problem. The search for a solution to the problem is carried out in Hölder spaces with weight. The article proves the Fredholm solvability of the problem, calculates its index.*

*Keywords: the Neumann problem, two-dimensional complex; the Riemann problem; task index; boundary task; Hölder space with weight*

На современном этапе развития математики, как науки, задача Дирихле является одной из самых востребованных задач. Связана это прежде всего с тем, что она возникает не только на плоскости, но и на многообразиях. Моделируя различные физические процессы, ученые получают набор уравнений с краевыми условиями Дирихле. Так, например, рассматривая колебания мембран, диффузию в неоднородных средах или в среде со сложным геометрическим устройством получается задача Дирихле на многообразиях разной размерности или так называемых стратифицированных множествах. Этим задачам посвящены исследования G. Lumer'a [4] и О.М. Пенкина [5].

В работе Овчинникова Ю.Н., И.А. Лукьянчук, [2] сформулирована задача о распределения поля и проводимости многокомпонентной системы, составленной из правильных треугольников. Эта задача может быть исследована в рамках теории, связанной с задачей Римана и описанной в работах А.П. Солдатова [1, 3].

В пространстве рассмотрим комплекс , полученный из четырехугольной пирамиды путем выбрасывания основания. Общую вершину всех граней обозначим , остальные вершины , распределим таким образом, чтобы , и . Множество состоит из точек , соответствующих вершинам , а их объединение .

Будем считать, что грани и попарно имеют равные углы при вершине , которые обозначим соответственно и .

Также нам необходимо обозначить стороны граней, которые в дальнейшем будем называть ребрами комплекса, следующим образом и .

Задача Неймана состоит в определении семейства из четырех гармонических функций , удовлетворяющих на ребрах следующим контактным условиям

на на

на на

Здесь − нормаль, направленная внутрь грани .

На ребрах выполнено условие Неймана

Эту задачу можно переформулировать по отношению к аналитическим функциям , реальные части которых совпадают с гармоническими функциями . Так как мнимые функции определены с точностью до константы, с учетом соотношений Коши-Римана предыдущие краевые условия переходят соответственно в

,

здесь некоторые константы.

Заметим, что по отношению к грани комплекса, его ребро повторяется два раза. Тогда, учитывая этот факт, введем единую нумерацию , для всех ребер и ориентируем их так, чтобы при обходе область оставалась слева. Далее, выбрав гладкие параметризации согласованные с ориентацией дуг .

Сужение функции , на отрезок , принадлежащий соответствующей грани , дает граничное значение функции , которое обозначим Семейство всех граничных значений обозначим . Тогда с помощью введенных параметризаций семейство ''снесем'' на интервал (0,1) и получим вектор с компонентами , . В этих обозначениях краевые условия запишутся в виде

с блочно-диагональной матрицей

*, ,*

*.*

и 12-вектор-функцией , заданной на интервале (0,1).

Заметим, что в такой постановке, задача относится к типу нелокальных краевых задач Римана, подробно изученных в работах [1, 3].

Поставленную задачу рассмотрим в весовом классе Гельдера, найдем значение для индекса задачи, и изучим асимптотику поведения функции в угловых точках.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ковалева Л. А., Солдатов А. П. Задача Дирихле для функций, гармонических на двумерной сети // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2019. − №160. − С. 42-48.

2. Овчинников Ю. Н., Лукьянчук И. А. Проводимость и распределение токов в двухкомпонентной системе, состоящей из правиль-ных треугольников // ЖЭТФ, 2002. − №121(1). − С. 239-252.

3. Солдатов А. П. Метод теоpии функций в эллипт. кpаевых задачах на плоскости. II. Кусочно- гладкий случай // Изв. АH СССР. 1992. −Т. 56 − №3. − С. 566-604.

4. Lumer, G. Espases ramifes et diffusion sur les reseaux topologiques // C.R. Acad. Sc. Paris. − 1980. − Serie A. − 291. − P. 219-234.

5. Penkin O. M. Second-order elliptic equations on a stratified set. Differential equations on networks // J. Math. Sci. (N. Y.). − 2004. − Т. 119. − №6. − P. 836-867

**Ковалева Лидия Александровна**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород

К. ф.-м. н., доцент, доцент кафедры «Прикладной математики икомпьютерного моделирования»

Тел.: +7(4722) 30-13-00\*4267

Е- mail: Kovaleva\_L@bsu.edu.ru

**Большанин Василий Викторович**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород

магистрант кафедры «Прикладной математики икомпьютерного моделирования»

Тел.: +7(4722) 30-13-00\*4267

**Вереитинова Галина Александровна**

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород

магистрант кафедры «Прикладной математики икомпьютерного моделирования»

Тел.: +7(4722) 30-13-00\*4267