УДК 519.6

Д.А. ТВЁРДЫЙ, Р.И. ПАРОВИК

D.A. TVERDYI, R.I. PAROVIK

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭРЕДИТАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РИККАТИ С МОДИФИКАЦИЕЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ГЕРАСИМОВА-КАПУТО**

**RESEARCH OF THE HEREDITARY DYNAMIC RICCATI SYSTEM WITH MODIFICATION FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATOR OF GERASIMOV-CAPUTO**

*В данной работе исследуется задача Коши для дифференциального уравнения Риккати с непостоянными коэффициентами и модифицированным дробно-дифференциальным оператором переменного порядка типа Герасимова-Капуто. С помощью численного алгоритма Ньютона-Рапсона с учетом различных значений параметров задачи Коши строятся расчетные кривые. Результаты расчетов сопоставляются с ранее полученными результатами. Исследуются вычислительная точность численного алгоритма. Показано с помощью правила Рунге, что вычислительная точность стремиться к точности численного метода при увеличении узлов расчетной сетки.*

*Ключевые слова: Дробная производная, эредитарность, оператор Герасимова-Капуто, дифференциальное уравнение Риккати, численные методы, метод Ньютона-Рапсона.*

*In this paper, we study the Cauchy problem for the Riccati differential equation with constant coefficients and a modified Gerasimov-Caputo type fractional differential operator of variable order. Using Newton-Raphson numerical algorithm, calculation curves are constructed taking into account different values of the Cauchy problem parameters. The calculation results are compared with the previously obtained results. The computational accuracy of the numerical algorithm is investigated. It is shown using the Runge rule that the computational accuracy tends to the accuracy of the numerical method when increasing the nodes of the calculated grid.*

*Keywords:* *Fractional derivative, hereditarity, Gerasimov-Caputo operator, Riccati differential equation, numerical methods, Newton-Rapson method.*

**Введение**

Классическое уравнение Риккати описывает процессы с насыщением, например, логистический закон в биологии или в экономике, также уравнение Риккати возникает после некоторых преобразований в физических задачах, например, в задачах отражения волн от неоднородной поверхности. Уравнение Риккати достаточно хорошо изучено с ним можно ознакомиться в различных справочниках и энциклопедиях по математике или в книге [1].

Однако в последнее десятилетие наблюдается всплеск работ по применению дробного исчисления к исследованию уравнения Риккати [2-21]. Это связано с тем, что процессы с насыщением могут обладать эффектами эредитарности. Эффект эредитарности означает, что система или процесс могут помнить о своей предыстории и его с точки зрения математики можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами – функциями памяти [22]. При выборе степенных функции памяти мы естественным образом переходим к хорошо известному математическому аппарату дробного исчисления, в частности к производным дробных порядков [23-25]. Уравнение Риккати с производной дробного порядка называют дробным уравнением Риккати.

Дробное уравнение Риккати с постоянным порядком было исследовано в работах [2-15]. Однако интерес представляет более широкий класс дробных уравнений Риккати с переменным порядком [16-21].

В работах авторов [17-21] было изучено дробное уравнение Риккати переменного порядка с непостоянными коэффициентами. С помощью численного метода Ньютона-Рапсона были получены расчетные кривые и исследована точность численного метода. Результаты исследований были использованы при моделировании некоторых логистических законов в модели динамики солнечной активности [21]. Вычисления и визуализации в указанных работах проводились в среде компьютерной математики Maple.

В настоящей работе будем использовать модифицированный оператор дробной производной типа Герасимова-Капуто переменного порядка. Далее проведем исследование численного решения дробного уравнения Риккати по аналогии с работой [20] и сопоставим, полученные результаты.

**Некоторые основные определения**

Здесь мы рассмотрим основные определения из теории дробного исчисления, более детально его аспекты можно изучить в книгах [23-25].

**Определение 1.** Дробная производная Герасимова-Капуто переменного порядка  имеет вид:

 (1)

где - гамма-функция Эйлера.

**Определение 2.** Модифицированная дробная производная типа Герасимова-Капуто переменного порядка  имеет вид:

 (2)

Производные дробных переменных порядков (1) и (2) приведены в работе [26], там же рассмотрены их некоторые свойства.

**Замечание 1.** Отметим, что в случае, когда порядки дробных производных в (1) и (2) являются константами, то они совпадают и операторы являются производными Герасимова-Капуто постоянных порядков [27,28].

**Постановка задачи**

Рассмотрим следующее эредитарное уравнение, которое является аналогом уравнения Риккати:

 (3)

где - функция решения,– функция памяти, – текущее время,  - время моделирования,– коэффициенты, заданные функции.

**Замечание 2.**Отметим, что если функция памяти является функцией Хевисайда, то процесс обладает полной памятью, если это функция Дирака, то память отсутствует.

Мы рассмотрим промежуточной случай, когда система со временем постепенно «забывает» свою предысторию. Для этого выберем функцию памяти следующим образом:

 (4)

где  - функция, которая отвечает за интенсивность исследуемого процесса, то с учетом Определения 1 при  мы приходим к следующему дробному уравнению Риккати переменного порядка:

, (5)

для которого справедливо начальное локальное условие:

. (6)

Уравнение (5) и начальное условие (6) образуют задачу Коши для дробного уравнения Риккати переменного порядка. Она была исследована авторами в работе [17].

Введем в рассмотрение другую функцию памяти:

 (7)

Здесь порядок - функция с запаздывающим аргументом, также определяет интенсивность рассматриваемого процесса.

С учетом (7) и Определения 2 при  дробное уравнения Риккати примет вид:

. (8)

В дальнейшем мы будем исследовать задачу Коши (8) и (6).

**Методика решения**

Так как задача Коши (8) и (6) в общем случае не имеет точного решения, то будем использовать для ее решения численные методы. Для этого разобьём временной отрезок на равных частей (узлов сетки), где  - шаг дискретизации,  а функция решения.

Аппроксимация дробной производной в уравнении (8) примет вид:

 (9)

где  и  - весовые коэффициенты квадратурной формулы трапеций вида:



Заметим, что методика аппроксимации задачи Коши (5), (6) основывается на результатах работы [30].

Исходя из (9), задачу Коши (8) и (6) можно переписать в разностной постановке:

 (10)

Для решения использовался итерационный метод Ньютона-Рапсона, который, как правило, обеспечивает быструю сходимость.

Алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Определим функцию для формирования Якобиана:

.

1. Определим элементы Якобиана:

.

1. Запишем матричное итерационное уравнение вида:

, (11)

где,

.

1. Запускаем итерационный процесс пока , где - точность, - критерий остановки, - критерий сходимости метода, где - критерий устойчивости.

**Замечание 3**. Следует отметить, что основная сложность применения этого метода заключается в нахождении обратной матрицы Якоби в (11). Для решения этой проблемы можно использовать метод Гаусса – Джордана [30].

**Параметры моделирования**

Переменный порядок рассматривается как периодическая функция:

(12)

где- коэффициент сдвига, позволяющий выполнить условие,  - амплитуда колебаний,  - частота колебаний.

Коэффициенты в разностном уравнении (10) будут принимать следующие значения:

.(13)

Введение коэффициентов вида (13), как показано в работе автора [21], обусловлено появлением кривых распределения, схожих с S-образной (логистической) кривой, что имеет свое прикладное применение.

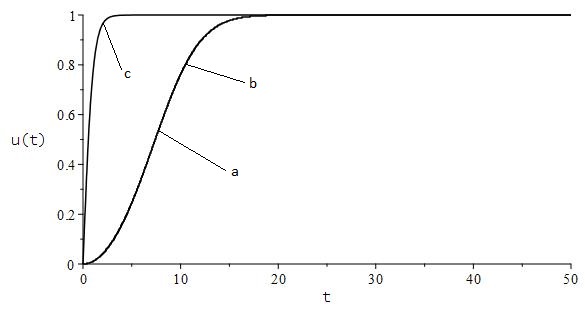
Рассмотрим следующие примеры при :

1. Пример 1: ;
2. Пример 2: при параметрах (12): ;
3. Пример 3: при параметрах (12): ;
4. Пример 4: при параметрах (12): ;

Изучим решение задач Коши (5), (6) и сопоставим его с решением задачи Коши (8), (6).

**Результаты моделирования**

Проведём верификацию, Покажем что применяя дробные производные (1) вида и (2) вида , при , получим одинаковые кривые распределения.

Рис.1 – Верификация. a,b)Пример 1 для оператора (1) и (2),c)Классическое решение, т.е. при ,и .

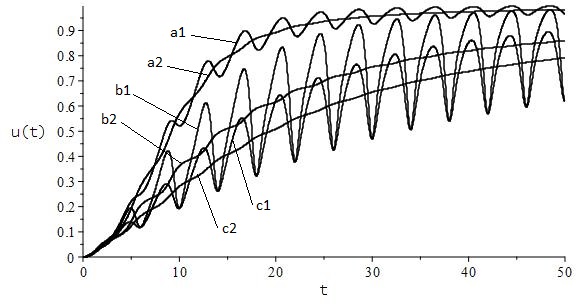
****

Рис.2 – Кривые распределения: a1) Пример 2 для (1), a2) Пример 2 для (2),  
b1) Пример 3 для (1), b2) Пример 3 для (2),  
c1) Пример 4 для (1), c2) Пример 4 для (2).

**Погрешность метода и расчётная точность**

Рассмотрим (в таблицах 1 – 4) изменение абсолютной ошибки (погрешности)  и расчётный порядок точности для численного алгоритма Ньютона-Рапсона решений задач Коши (5),(6) и (8), (6) при уменьшении шага дискретизации . Для вычисления абсолютной ошибки, будем использовать правило Рунге [32]:

. (14)

**Замечание 4.** Априорную точность решения в данном методе положим равной 1. Это следует из глобального порядка аппроксимации схемы.

Точность решения вычислялась по следующей формуле:

 (15)

где  - шаги дискретизации, - ошибка на шагах (предыдущий) и  (текущий).

Таблица 1 – ;

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T=50 | |  | |  | |
| N | =T/N |  | p |  | p |
| 129 | 0.387 | 0.063871 | - | 0.063871 | - |
| 259 | 0.193 | 0.032515 | 0.974045 | 0.032515 | 0.974045 |
| 519 | 0.096 | 0.016398 | 0.987562 | 0.016398 | 0.987562 |
| 1039 | 0.048 | 0.008233 | 0.993947 | 0.008233 | 0.993947 |
| 2079 | 0.024 | 0.004125 | 0.997027 | 0.004125 | 0.997027 |

Таблица 2 – при параметрах (9): ;

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T=50 | |  | |  | |
| N | =T/N |  | p |  | p |
| 129 | 0.3876 | 0.070173 | - | 0.045638 | - |
| 259 | 0.1931 | 0.034098 | 1.041212 | 0.023454 | 0.960369 |
| 519 | 0.0963 | 0.017016 | 1.002759 | 0.011735 | 0.998989 |
| 1039 | 0.0481 | 0.008363 | 1.024701 | 0.005831 | 1.008889 |
| 2079 | 0.0240 | 0.004117 | 1.022315 | 0.002892 | 1.011413 |

Таблица 3 –  при параметрах (9): ;

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T=50 | |  | |  | |
| N | =T/N |  | p |  | p |
| 129 | 0.3876 | 0.305098 | - | 0.028593 | - |
| 259 | 0.1931 | 0.182349 | 0.742568 | 0.013625 | 1.069381 |
| 519 | 0.0963 | 0.095837 | 0.928038 | 0.006677 | 1.029022 |
| 1039 | 0.0481 | 0.048632 | 0.978686 | 0.003289 | 1.021300 |
| 2079 | 0.0240 | 0.024420 | 0.993831 | 0.001633 | 1.009579 |

Таблица 4 – при параметрах (9): ;

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T=50 | |  | |  | |
| N | =T/N |  | p |  | p |
| 129 | 0.3876 | 0.180735 | - | 0.016893 | - |
| 259 | 0.1931 | 0.110282 | 0.712672 | 0.008336 | 1.019414 |
| 519 | 0.0963 | 0.056046 | 0.976513 | 0.004205 | 0.986786 |
| 1039 | 0.0481 | 0.028572 | 0.972018 | 0.002139 | 0.975103 |
| 2079 | 0.0240 | 0.014311 | 0.997402 | 0.001086 | 0.976774 |

**Заключение**

Была рассмотрена задача Коши для дробного уравнения Риккати (8), (5) с переменными коэффициентами. Проведён численный анализ предложенной задачи Коши с помощью метода Ньютона-Рапсона. Проведена оценка вычислительной точности по правилу Рунге для применяемого численного метода. Показано, что вычислительная точность при увеличении числа расчетных узлов стремиться к точности метода. Далее было сопоставлено решение задачи Коши (5), (6) с задачей Коши (8), (6), которые отличаются друг от друга, но сохраняют общий тренд. Этот факт говорит о том, что задача Коши (8), (6) имеет место и ее решение может быть использовано при исследовании процессов с насыщением и эффектами памяти, например, при прогнозировании экономических циклов и кризисов [31].

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Reid W.T. Riccati differential equations, Acad. Press,1972.
2. Khashan, M. M., Amin, R., Syam, M. I. A new algorithm for fractional Riccati type differential equations by using Haar wavelet. Mathematics, No.7(6), p.545, 2019.
3. Hou, J., & Yang, C.. Numerical solution of fractional-order Riccati differential equation by differential quadrature method based on Chebyshev polynomials. Advances in Difference Equations, No. 2017(1), p.365, 2017.
4. Sakar, M. G., Akgül, A., Baleanu, D. On solutions of fractional Riccati differential equations. Advancesin Difference Equations, No. 2017(1), p.39, 2017.
5. Merdan, M. On the solutions fractional Riccati differential equation with modified Riemann-Liouville derivative. International Journal of differential equations, No. 1-17, Vol. 2012, p. 346089, 2012.
6. Khader, M. M., Mahdy, A. M. S., Mohamed, E. S. On approximate solutions for fractional Riccati differential equation. International Journal of Engineering and Applied Sciences, No. 4(9), p. 8269, 2014.
7. Khader, M. M. Numerical treatment for solving fractional Riccati differential equation. Journal of the Egyptian Mathematical Society, No. 21(1), pp. 32-37, 2013.
8. Gohar, M. Approximate Solution to Fractional Riccati Differential Equations. Fract, No. 27(8), 1950128-18, 2019.
9. Syam, M. I., Alsuwaidi, A., Alneyadi, A., Al Refai, S., Al Khaldi. Implicit hybrid methods for solving fractional Riccati equation. Journal of Nonlinear Sciences and Applications (JNSA), No. 12(2), pp.124-134, 2019.
10. Ezz-Eldien, S. S., Machado, J. A. T., Wang, Y., Aldraiweesh, A. A. An algorithm for the approximate solution of the fractional Riccati differential equation. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, No. 20(6), pp.661-674, 2019.
11. Salehi, Y., Darvishi, M. T. An investigation of fractional Riccati differential equation. International Journal for Light and Electron Optics, No. 127(23), pp.11505-11521, 2016.
12. Khan, N. A., Ara, A., & Khan, N. A. Fractional-order Riccati differential equation: analytical approximation and numerical results. Advances in Difference Equations, No. 2013(1), p.185, 2013.
13. Ezz-Eldien, S. S. On solving fractional logistic population models with applications. Computational and Applied Mathematics, No. 37(5), p.6392-6409, 2018.
14. Sweilam N.H., Khader M.M., Mahdy A.M.S. Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation // Applications and Applied Mathematics,vol. 7, No. 2, pp. 595-608, 2012.
15. Aminikhah, H., Sheikhani, A. H. R., Rezazadeh, H. Approximate analytical solutions of distributed order fractional Riccati differential equation. Ain Shams Engineering Journal, No. 9(4), pp. 581-588, 2018.
16. Syam, M., Jaradat, H. M. An accurate method for solving Riccati equation with fractional variable-order. Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing. No. 1, pp. 1-12, 2018.
17. Tverdyi D.A. Riccati equation with variable heredity. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, Vol. 16, No. 1, pp. 61-68, 2017.
18. Tverdyi D.A., Parovik R.I. Program of numerical calculation of the Cauchy problem for the Riccati equation with fractional variable order. Fundamental research, No. 8(1), pp. 98-103, 2017. (In Russian).
19. Tverdyi D. A. The Cauchy problem for the Riccati equation with variable power memory and non-constant coeffcients, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. Nauki, No. 23(3), pp.148-157, 2018. (In Russian)
20. Tverdyi D. A. The problem for the Riccati equation with a modified fractional derivative of Gerasimov-Caputo variable order. Problems of Computational and Applied Mathematics, No. 3(27), pp. 93–103, 2020. (In Russian)
21. Tverdyi D. A. The nonlocal Cauchy problem for the Riccati equation of the fractional order as a mathematical model of dynamics of solar activity. News of KBSC of RAS, No. 1 (93). pp. 57-62, 2020. (In Russian)
22. Volterra V. Sur les ´equations int´egro-differentielles et leurs applications // Acta Mathematica, 1912, vol. 35, no. 1, pp. 295–356.
23. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006, 523 p.
24. Oldham K. B., Spanier J. The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. London: Academic Press, 1974, 240 p.
25. Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: A Wiley-Interscience publication, 1993. 384 p.
26. Lorenzo, C. F., & Hartley, T. T. Variable order and distributed order fractional operators. Nonlinear dynamics, No. 29(1-4), pp. 57-98, 2002.
27. Gerasimov, A. (A generalization of linear laws of deformation and its applications to problems of internal friction, Prikl. Matem. iMekh. (PMM), Vol. 12 No.3, pp. 251–260, 1948. (in Russian)
28. Caputo M. Elasticita e dissipazione. Bologna: Zanichelli, 1969, 150 p.
29. Parovik R.I. Numerical analysis some oscillation equations with fractional order derivatives. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, Vol. 9, No. 2, pp. 34-38, 2014.
30. Lipschutz, S., Lipson,. Linear Algebra, 4th edition. McGraw-Hill, 2009, 432 p.
31. Makarov D.V., Parovik R.I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus. Journal of Internet Banking and Commerce, vol. 21. № S6, 2016.
32. Berezin I.S., Zhidkov N.P., Computational Methods. - State. publishing house of physical and mathematical literature, vol. 2, 1962. (in Russian)

**Твёрдый Дмитрий Александрович**

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский

Младший научный сотрудник, лаборатория «дробного исчисления и его приложений»

Тел: +7 (9167) 44-59-52

E-mail: [dimsolid95@gmail.com](mailto:dimsolid95@gmail.com)

**Паровик Роман Иванович**

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Камчатский край, с.Паратунка

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский

Д.ф.-м.н., доцент кафедры «математики и физики»

Тел: +7 (925 4) 77-80-62

E-mail: [romanparovik@gmail.com](mailto:romanparovik@gmail.com)