|  |
| --- |
| УДК 517.923 |
|  |
| С.М. СИТНИК, Э.Л. ШИШКИНА  S.M.SITNIK, E.L. SHISHKINA |
|  |
| **О ПОСЛЕДНИХ РЕЗУЛЬТАТАХ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**  **recent results in transmutation theory** |
|  |
| *Рассаматриваются результаты, полученные авторами или с их участием в последнии годы, в теории операторов преобразования и их приложений. Рассмотрены вопросы приложений к теории потенциала, сингулярным дифференциальным уравнениям, обратным задачам.*  *Ключевые слова: операторы преобразования; сингулярные дифференциальные уравнения, потенциалы, специальные функции, композиционный метод.* |
|  |
| *We consider results which were proved and published by authors recently in transmutation theory.Applications are considered to potential theory, singular differential equations, inverse problems.*  *Keywords: transmutations; singular differential equations, potentials, special functions, composition method .* |
|  |
| В тезисах изложен обзор некоторых современных исследований по теории операторов преобразования и их приложениям. Опишем ряд недавних публикаций и материалов  по тематике операторов преобразования и их приложений подробнее.  Как указано в [1-4], теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и её приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010), ученика Ивана Александровича Киприянова.  К числу важных результатов В. В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования. Им также совместно с И. А. Киприяновым были введены и изучены уравнения с псевдодифференциальными операторами, которые определялись через преобразование Ханкеля при помощи операторов преобразования Сонина и Пуассона.  Особо следует выделить введённый В. В. Катраховым новый класс краевых задач для уравнения Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. На основе введённого им нового класса операторов преобразования, получаемых из известных операторов Сонина и Пуассона композициями с дробными интегралами Римана—Лиувилля, В. В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С. Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями.  Монография В.В. Катрахова и С.М. Ситника [1] составлена из результатов, вошедших в докторские диссертации В. В. Катрахова (1989 г.) и С. М. Ситника (2016 г.). Результаты  второго автора (ученика) развивают результаты первого автора (учителя). Кроме того, в книге отражён вклад Ивана Александровича Киприянова и созданной им Воронежской математической школы по сингулярным и вырождающимся дифференциальным уравнениям в развитие теории дифференциальных уравнений и теории функций.  В монографии Э. Л. Шишкиной [2] развивается теория гиперболических уравнений в частных производных с операторами Бесселя, а также конструируются и обращаются гиперболические потенциалы, порожденные многомерным обобщенным сдвигом.  Исследуются вопросы ограниченности таких потенциалов, их свойства, а также строятся обратные операторы методом регуляризации. Получены решения задач Коши для однородного и неоднородного уравнений указанного типа. В заключении приведены сведения об общих методах решения задач для произвольных сингулярных операторов.  Дополним, что монографии [1] и [2] переведены на английский язык и вскоре переводы будут опубликованы издательством Шпрингер.  Следует подчеркнуть, что, к сожалению, на русском языке долгое время отсутствовали специализированные монографии, посвященные общей теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Монография С.М. Ситника и Э.Л. Шишкиной [3] в определённой степени заполняет этот пробел. Отметим, что существенная часть результатов, изложенных в [3], получена авторами, часть из них публикуется там впервые. Текст монографии разделён на три части. В первой части рассмотрены следующие основные вопросы: основные исторические сведения, необходимые факты из теории специальных функций, функциональных пространств и интегральных преобразований, более подробное изложение свойств преобразования Меллина, включая теорему Слейтер а также обзор основных конструкций дробного интегродифференцирования, результаты о различных классах операторов преобразования: Сонина–Пуассона, Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова, свойства операторов обобщённого сдвига и весовых сферических средних. Во второй части рассматриваются различные приложения операторов преобразования, а также изучено общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, включая ранее не рассмотренные в литературе случаи особых параметров и начальных условий. Также изложена теория явных представлений для дробных степеней оператора Бесселя, кратко намечены их приложения к некоторым  интегродифференциальным уравнениям дробного порядка. В третьей части книги излагается принадлежащий С.М. Ситнику композиционный метод построения операторов преобразования (ITCM - Integral Transforms Composition Method). Этим методом получаются по единой схеме все известные ранее в явном виде операторы преобразования, а также построены многочисленные новые классы операторов преобразования. Рассмотрены приложения композиционного метода к решению некоторых классов интегродифференциальных уравнений. В этой части также изложены результаты для дифференциальных операторов Бесселя, возмущённых потенциалами достаточно общего вида.  В опубликованной в 2020 г. издательством Elsevier в основанной Р. Беллманом престижной серии Mathematics in Science and Engineering монографии Э.Л. Шишкиной и С.М. Ситника [4] изложены на английском языке для широкой международной профессиональной аудитории основные вопросы современной теории операторов преобразования и их приложений. Существенную часть этой книги занимают результаты Э.Л. Шишкиной по теории обобщённых потенциалов и их приложениям к дифференциальным уравнениям с особенностями.  Также в 2020 г. в издательстве Springer в серии Trends in Mathematics был опубликован сборник работ [5] под редакцией В.В. Кравченко и С.М. Ситника по современной теории операторов преобразования. В сборник вошли работы многих изветных математиков из России, США, Сербии, Хорватии, Узбекистана, Вьетнама, Израиля, Польши, Туниса, Германии, Мексики. В этом сборнике отражён весь спектр задач современной теории операторов преобразования и их многочисленных приложений.  В 2020 г. в издательстве Springer опубликована монография В.В. Кравченко [6]. В этой монографии изложены новые подходы к решению прямых и обратных спектральных задач для уравнения Штурма-Лиувилля на полуоси и оси. На основе предложенных методов разработаны эффективные численные методы для решения этих задач, которые во многом превосходят методы, известные ранее. Методы решения одномерных обратных задач и обратных задач рассеяния традиционно тесно связаны с теорией операторов преобразования и во многом основаны на результатах этой теории.  Отметим также организованную В.В. Кравченко в октябре 2019 г. в Кэретаро, Мексика, CINVESTAV, первую специализированную конференцию по теории операторов преобразования [7], получившую сладко звучащее по-русски название TORT (Transmutation Operators and Related Topics). В конференции приняли участие ряд известных математиков.  Таким образом, теория операторов преобразования является живой и активной ветвью как теоретической математики, так и их многочисленных приложений. Операторам преобразования посвящено достаточное число публикаций, в том числе издающихся ведущими мировыми издательствами монографий и сборников.  **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**   1. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 64, № 2. – 2018. - С. 211-426. 2. Шишкина Э.Л. Общее уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу и гиперболические B--потенциалы // Современная математика. Фундаментальные направления. Уравнения в частных производных. Т. 65, № 2. - 2019. - С. 157-338. 3. Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Физматлит, 2019. - 246 С. 4. Shishkina E.L., Sitnik S.M. Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics. In the Series: Mathematics in Science and Engineering. Elsevier, Academic Press, 2020. - 592 pp. 5. Ed. V.V. Kravchenko, S.M. Sitnik. Transmutation Operators and Applications. In the Series: Trends in Mathematics. Springer, Birkhauser, 2020. - XVII, 686 pp. 6. Kravchenko V.V. Forward and Inverse Sturm-Liouville Problems: A Method of Solution. In the Series: Frontiers in Mathematics. Springer, 2020. - 155 pp. 7. International Workshop on Transmutation Operators and Related Topics - I. Queretaro, Mexico, CINVESTAV. 2019.   **Ситник Сергей Михайлович**  Белгородский государственный национальный  исследовательский университет «БелГУ», г. Белгород  Д.ф.-м.н., профессор кафедры «Прикладная математика и компьютерная моделирование»  Тел.: +7 (4722) 30-12-13  E-mail: [sitnik@bsu.edu.ru](mailto:sitnik@bsu.edu.ru)  **Шишкина Элина Леонидовна**  Воронежский государственный университет «ВГУ», г. Воронеж  Д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математическиеметодыисследования операций*»*  Тел.: +7 (473) 2-208-266  E-mail: [ilina\_dico@mail.ru](https://e.mail.ru/compose?To=sitnik@bsu.edu.ru) |