УДК 517.98

Л.Ю. КАБАНЦОВА

L.J. KABANTSOVA

**ОБРАТИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ**

**INVERTIBILITY OF SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS IN HOMOGENEOUS FUNCTION SPACES**

 *В работе изучаются линейные дифференциальные операторы (уравнения) второго порядка в однородном пространстве функций, определенных на всей оси. Приводятся условия их обратимости. Основные результаты получены на основе сопоставления исследуемому дифференциальному оператору операторной матрицы второго порядка и последующего использования теории дифференциальных операторов первого порядка, определяемого этой операторной матрицей. Приводится общая схема изучения условий разрешимости различных классов уравнений второго порядка с помощью операторных матриц второго порядка, которая содержит как частный случай изучаемую задачу.*

 *Ключевые слова: однородное пространство функций, линейный дифференциальный оператор, обратимый оператор, спектр оператора.*

 *Linear differential operators (equations) of the second order in homogeneous spaces of functions defined on the entire real axis are studied. Conditions of their invertibility are given. The main results are based on putting a differential operator in correspondence with a second-order operator matrix and further use of the theory of first-order differential operators that are defined by the operator matrix. A general scheme is presented for studying the solvability conditions for different classes of second-order equations using second-order operator matrices. The scheme includes the studied problem as a special case.*

 *Keywords: homogeneous function space, linear differential operator, reversible operator, operator spectrum.*

Пусть – комплексное банахово пространство, – банахова алгебра операторов, действующих в .

Через , будем обозначать пространство Степанова локально суммируемых со степенью измеримых на со значениями в функций, для которых конечна величина .

**Определение.** Функциональное банахово пространство называется *однородным*, если оно обладает следующими свойствами:

1. непрерывно вложено в пространство Степанова ;
2. для всех и имеет место , где – оператор сдвига, при этом является изометрией в ;
3. для всех и функция принадлежит и имеет место оценка ;
4. для всех и свертка принадлежит и имеет место оценка ;
5. если таков, что для всех ; то (*свойство невырожденности*).

Примерами однородных пространств являются: пространство непрерывных ограниченных функций и все его замкнутые подпространства инвариантные относительно сдвигов , в частности, подпространство исчезающих на бесконечности функций ; пространство измеримых по Бохнеру функций; пространство Степанова .

В однородном пространстве рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка вида

; ; (1)

где ; а – операторнозначные функции из пространства

Стандартной заменой переменных уравнение (1) сводится к дифференциальному уравнению первого порядка

 (2)

Здесь , , а операторнозначная функция имеет следующий вид: при каждом оператор определяется в матрицей

.

Заметим, что одновременная разрешимость уравнений (1) и (2) очевидна для правых частей специального вида, а именно, .

Уравнения (1) и (2) запишем в операторном виде

, , ,

где дифференциальный оператор определяется формулой

. (3)

Оператор , есть оператор дифференцирования с областью определения абсолютно непрерывных функций из с производной, принадлежащей пространству . Оператор имеет область определения

.

Оператор определяется матрицей

 (4)

При описанном выше подходе сведения уравнения (1) к уравнению (2) одновременно обратимы оператор и оператор

с областью определения и областью значений в подпространстве из .

Неудобство использования оператора связано с тем, что он действует между разными пространствами и отсутствуют работы по его изучению. В свою очередь, спектральные свойства оператора достаточно хорошо изучены [1]-[5], причем и в случае когда операторы , , являются неограниченными. Возникает естественный вопрос о близости таких свойств операторов и , как совпадение размерностей ядер, одновременной замкнутости их образов, совпадение размерностей кообразов, одновременной их обратимости. При утвердительном ответе на эти вопросы изучение ряда свойств дифференциального оператора второго порядка , связанных с его обратимостью, сводится к выяснению соответствующих свойств дифференциального оператора первого порядка . Следовательно, появляется возможность применения результатов работ [1]-[6].

**Теорема 1.** *Дифференциальный оператор второго порядка обратим тогда и только тогда, когда обратим дифференциальный оператор . Если оператор обратим, то обратный к оператор определяется матрицей*

*,*

*где – любое число из*

**Теорема 2.** *Спектр оператора не зависит от выбора функционального пространства . В частности, оператор одновременно обратим в любом из рассматриваемых функциональных пространств .*

Утверждение теоремы 2 непосредственно следует из теоремы 1 и результатов статей [5], [7], [8] в которых содержится соответствующее утверждение для дифференциальных операторов первого порядка (в частности, ). В [6] установлены оценки норм обратных операторов.

Полученные в работе результаты (например, теорема 1) опираются на общую схему изучения абстрактных операторов второго порядка, действующих в банаховых пространствах. Аналогичная схема изучения условий обратимости ограниченных операторов применена в работе [9]. Однако, для изучения дифференциальных операторов потребовалась её модификация.

Пусть комплексное банахово пространство, линейный оператор с непустым резольвентным множеством и операторы из алгебры . Рассмотрим линейный оператор

 (5)

с областью определения .

Наряду с оператором определим оператор с помощью матрицы

. (6)

**Теорема 3.** *Пусть оператор A обратим. Оператор обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор .*

*Если оператор обратим, то обратный к оператор определяется матрицей*

.

Если положить оператор дифференцирования в , то и , где операторы и введены с помощью формул (3) и (4) соответственно. Однако, оператор не является обратимым. Следовательно, непосредственно воспользоваться теоремой 3 для установления одновременной обратимости операторов и нельзя. Заметим, что любое число является точкой резольвентного множества оператора дифференцирования (см., например, [1]), поэтому оператор c обратим. Этот факт позволяет установить одновременную обратимость операторов и следующим образом.

 Возвратимся к рассмотрению операторов, определённых формулами (5) и (6). Пусть число является точкой резольвентного множества оператора . Тогда для оператора имеет место представление

,

где , , , причем оператор обратим. Соответствующий оператор определяется матрицей вида

.

**Лемма.** *Пусть является точкой резольвентного множества оператора . Тогда оператор подобен оператору с оператором преобразования , определяемым матрицей , т. е. имеет место равенство*

.

Таким образом, операторы и  обратимы одновременно и к оператору можно применить теорему 3.

**Теорема 4.** *Оператор обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор .*

*Если оператор обратим, то обратный к оператор определяется матрицей*

,

*где любое число из .*

**Замечание.** К операторам вида (5) относится дифференциально-разностный оператор второго порядка

,

, (6)

где оператор дифференцирования, а разностные операторы вида

,

для которых выполнено условие

.

Если для всех то оператор является дифференциальным оператором с запаздывающим аргументом. Таким же будет и сопоставляемый оператору дифференциально-разностный оператор первого порядка

действующий по правилу

Здесь разностный оператор определяется матрицей

,

т. е. разностный оператор имеет вид:

для любой пары функций .

Из теоремы 4 следует, что операторы и одновременно обратимы. Таким образом, для исследования оператора (6) с разностными операторами может быть использован ряд известных результатов работы [10] об условиях обратимости дифференциально-разностных операторов первого порядка, в том числе дифференциальных операторов запаздывающего типа.

Вернёмся к дифференциальному оператору предполагая, что коэффициенты являются постоянными операторами.

Рассмотрим соответствующий ему пучок операторов (характеристический многочлен) .

**Теорема 5.** Следующие условия эквивалентны:

1. оператор обратим;
2. спектр пучка не пересекается с мнимой осью, т. е.

;

1. оператор  обратим;
2. спектр оператора не пересекается с мнимой осью, т. е.

;

1. оператор задаваемый формулой

обратим в хотя бы при одном (и, следовательно, обратим при всех

).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Баскаков А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функциональный анализ и его приложения. 1996. Т. 30, вып. 3. С. 1-11.
2. Баскаков А. Г. Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов // Матем. заметки. 1996. Т. 59, вып. 6. С. 586-593.
3. Баскаков А. Г. О корректности линейных дифференциальных операторов // Матем. сб. 1999. Т. 19, вып. 3. С. 3-28.
4. Баскаков А. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 7, вып. 2. С. 3-68.
5. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013.

Т. 68, вып. 1. С. 77-128.

1. Баскаков А. Г., Синтяев Ю. Н. Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов; оценки решений // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, вып. 2. С. 210-219.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
3. Баскаков А. Г., Диденко В. Б. Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, вып. 3. С. 174-190.
4. Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю. Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка // Известия РАН. Сер.мат. 2015. Т. 79, вып. 2. С. 3-20.
5. Kurbatov V.G. Functional-Dierential Operators and Equations. Mathematics and its Applications // Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 1999. Vol 173.

**Кабанцова Лариса Юрьевна**

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

преподаватель кафедры «Системного анализа и управления»

Тел.: 8-905-049-31-41

E-mail: dlju@yandex.ru