|  |
| --- |
| УДК 517.9 |
|  |
| С.М.СИТНИК, Э.Л. ШИШКИНАS.M.SITNIK, E.L. SHISHKINA |
|  |
| **ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ****APPLIED ASPECTS OF EQUATIONS WITH SINGULARITIES** |
|  |
| *В данной статье автор освещает прикладные аспекты одного из сингулярных уравнений – общего уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Рассмотрены модели с этим уравнением в теории вероятности и статистике, квантовой механике, компьютерной томографии.* *Ключевые слова: оператор Бесселя; уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу; случайное блуждание.* |
|  |
| *In this article, the author gives the applied aspects of one of the singular equations. This equation is the general Euler-Poisson-Darboux equation. Models with this equation in probability theory and statistics, quantum mechanics, computed tomography are considered.**Keywords: Bessel operator; Euler-Poisson-Darboux equation; random motion.* |
| Рассмотрим прикладные аспекты уравнения с особенностями вида $\frac{∂^{2}u}{∂t^{2}}+\frac{k}{t}\frac{∂u}{∂t}-\sum\_{j=1}^{n}\frac{1}{x\_{j}^{γ\_{j}}}\frac{∂}{∂x\_{j}}x\_{j}^{γ\_{j}}\frac{∂u}{∂x\_{j}}=f,$ (1) |
| где k$\in R$, $γ\_{j}>0$, j=1,…,n, t>0, $x\_{j}>0$, u=u(t,x), f=f(t,x) – некоторые функции с подходящими свойствами. Уравнение (1) называется **общим неоднородным уравнением Эйлера-Пуассона-Дарбу**. Рассмотрим задачи, приводящие к уравнению (1), а также к более общим уравнениям.В последнее время интерес исследователей случайных блужданий привлекли уравнения вида (см. [1,2])$\frac{∂}{∂t}\left[\frac{1}{c(x,t)}\frac{∂p}{∂t}\right]+2λ\frac{1}{c(x,t)}\frac{∂p}{∂t}=\frac{∂}{∂x}\left[c(x,t)\frac{∂p}{∂x}\right]$ (2)Такие модели восходят к работам М. Каца (см. [3[). В (1) рассматривается случай пуассоновского процесса со скоростью λ = λ (t), где p=p(x,t) - закон вероятности соответствующего случайного движения при конечной скорости c(x,t). В случае, когда движение осуществляется в пространстве (x$\in R^{n}$), λ(t)$\~$α/t, c(x,t)=(c1(x),…, cn(x)) в [1] получено уравнение n-мерного случайного блуждания частицы вида$\frac{∂^{2}v}{∂t^{2}}+\frac{2α+n-1}{t}\frac{∂v}{∂t}=\sum\_{j=1}^{n}c\_{j}\left(x\_{j}\right)\frac{∂}{∂x\_{j}}c\_{j}\left(x\_{j}\right)\frac{∂v}{∂x\_{j}} .$ (3)Одним из методов решения уравнений (1)-(3) является метод операторов преобразования (см. [4,5]).Легко видеть, что уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу (1) является простейшим линейным гиперболическим уравнением n+1 независимых переменных, коэффициенты которых имеют особенности и, следовательно, представляют интерес для квантовой механики и теории относительности (см. [6]). В качестве некоторые из возможных приложений к квантовой механике относятся явное вычисление главных членов в выражении для обратного рассеяния в пространстве-времени Шварцшильда и явное вычисление главных членов в индуцированных веществом особенностях в плоскости симметричного пространства-времени. Уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу (1) тесно связано с различными методами визуализации, которые представляют большой интерес в различных областях современных исследований, имеющих дело с изображениями в некоторых типах томографических экспериментов, в том числе оптоакустической томографии, термоакустической томографии, радиолокации и эхолокации (см. [7-11]). Особо важной является задача восстановления функции по ее сферическим средним, представляющими собой решение задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Решение указанной задачи восстановления позволяет получить изображение по данным, полученным в результате сканирования объекта исследования. Чаще всего такой подход встречается в медицине, а именно в таких методах диагностики как компьютерная томография, магнитно-резонансная томография, ультразвуковое исследование, термография, фотоакустическая томография. Однако, эти же самые методы восстановления изображения используются и для разведки местности при помощи радиолокации и эхолокации. Например, задача восстановления функции по ее сферическим средним является актуальной при получении радиолокационных изображений способом радиолокационного синтезирования апертуры, для решения задач оперативного выявления и оценки фактической радиационной обстановки при помощи позитронно-эмиссионной томографии при исследовании местности методами тепловизорной томографии и др. Задачи для уравнения (1) поставлены и решены в [12-17].**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**1. Garra R., Orsinger E. Random Motions with Space-Varying Velocities. In: Modern problems of stochastic analysis and statistics – selected contributions in honor of Valentin Konakov, ed. V. Panov, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 208, part 1, 2017, pp. 25-39.
2. Garra R. and Orsingher E. Random flights related to the Euler–Poisson–Darboux equation, Markov Process. Related Fields, 22 (2016), pp. 87-110.
3. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики, М. : Наука, 1967, 107 с.
4. Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических // СМФН,. 2018.Т. 64, № 2. С. 211-426.
5. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу.//Узбекский математический журнал. - 2013. № 3. -С. 57-69.
6. Stewart J.M. The Euler–Poisson–Darboux equation for relativists. General Relativity and Gravitation. – 2009. V. 41, I. 9, pp. 2045-2071.
7. Kuchment P. The Radon Transform and Medical Imaging. Philadelphia: SIAM, 2014. - 233p.
8. Kuchment P. Generalized Transforms of Radon Type and Their Applications, in G. Olafsson and E. T. Quinto (Editors), The Radon Transform, Inverse Problems, and Tomography, Proc. Symp. Appl. Math. v. 63, AMS, Providence, RI 2006, pp.67 - 91.
9. Agranovsky M., Finch D., Kuchment P. Range conditions for a spherical mean transform, Inverse Problems and Imaging, Volume 3, No. 3, 2009, 373-382.
10. Helgason S. Integral Geometry and Radon Transform. Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London, 2011.
11. Palamodov, V. Reconstructive integral geometry. Monographs in Mathematics, 98. Birkhauser Verlag, Basel (2004) 164 p.
12. Барабаш О.П., Шишкина, Э.Л. Решение общего уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, содержащее оператор Бесселя по всем переменным // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2016. - Т. 21, No 6. - С. 2146-2151.
13. Sitnik S.M., Shishkina E.L. General form of the Euler-Poisson-Darboux equation and application of the transmutation method // Electron. J. Differ. Equ. - 2017. - Vol. 177, №. 177. - P. 1-20.
14. Shishkina E.L. Generalized Euler-Poisson-Darboux equation and singular Klein-Gordon equation // J. Phys. Conf. Ser. - 2018. - Vol. 973. - P. 1-21.
15. Shishkina E.L. Solution of the singular Cauchy problem for a general inhomogeneous Euler-Poisson-Darboux equation // Carpathian Journal of Mathematics. - 2018. - Vol. 2. - P. 255-267.
16. Shishkina E.L. Singular Cauchy problem for the general Euler-Poisson-Darboux equation // Open Mathematics. - 2018. - Vol. 16. - P. 23-31.
17. Shishkina E.L., Karabacak M. Singular Cauchy problem for generalized homogeneous Euler-Poisson-Darboux equation // Математические заметки СВФУ. - 2018. - Т. 25, № 2. - С. 85--96.

**Шишкина Элина Леонидовна**Воронежский государственный университет, г. ВоронежК.ф.-м..н., доцент кафедры Математического и прикладного анализа факультета Прикладной математики, информатики и механикиТел.: +7(920) 415-25-89E-mail: ilina\_dico@mail.ru |
|  |